1. Calculul forțelor de legătură (reacțiunilor) la bare drepte simplu rezemate

1.1 Introducere

Calculul forțelor de legătură reprezintă primul pas (obligatoriu), din algoritmul de abordare al oricărei probleme de Rezistența Materialelor; de corectitudinea modului de parcurgere al acestuia depind ceilalți pași ai rezolvării.

Obiectivul acestui seminar este de a descrie și a exemplifica algoritmul de determinare a valorilor corecte a reacțiunilor corespunzătoare unei scheme de calcul dată, indiferent de gradul de complexitate al acesteia.

Vor fi dobândite competențe de stabilire și determinare cantitativă a valorilor corecte ale forțelor de legătură corespunzătoare schemei de rezemare date, în scopul utilizării acestora în cadrul treptelor ulterioare ale algoritmului general de rezolvare al unei probleme de Rezistența Materialelor.

Durata medie de studiu individual pentru această prezentare este de circa 60 de minute.

1.2 Cazuri elementare

1.2.1 Grindă dreaptă simplu rezemată încărcată cu o sarcină concentrată

Se consideră grinda dreaptă simplu rezemată încărcată conform figurii de mai jos, pentru care se dorește calculul forțelor de legătură de la nivelul reazemelor structurii:

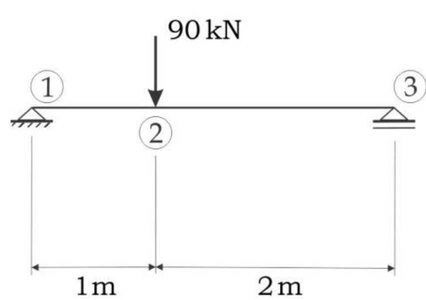


fig. 1

Stabilirea forțelor de legătură va ține seama de caracterul simplu al schemei de rezemare (pereche reazem articulat/reazem simplu), astfel, reazemul articulat va permite doar rotire în raport cu secțiunea caracteristică 1, iar reazemul simplu, rotire în raport cu secțiunea 3 și translație pe direcția paralelă cu talpa de sprijin. În consecință, **forțele de legătură vor apare pe direcția gradelor de libertate interzise**, reazemul articulat nepermițând deplasarea (translația) pe direcțiile orizontală și verticală ale sistemului de referință iar reazemul simplu, deplasarea (translația) pe direcție perpendiculară la talpa de sprijin a acestuia; reacțiunile dorite sunt (pentru problema de față), H_1, V_1 și V_3 (fig. 2).

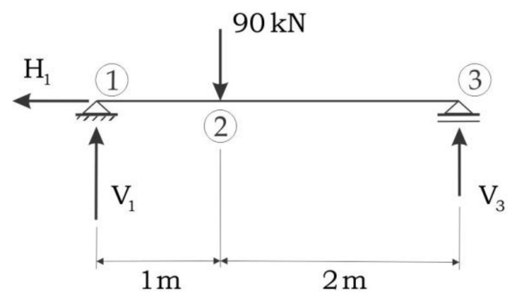


fig. 2

Obs.

- În figura 2, odată cu stabilirea reacțiunilor de calculat, simbolurile grafice ale reazemelor corespunzătoare ar putea fi eliminate din desen, corpul 1-3 găsindu-se în stare de echilibru sub acțiunea schemei de încărcare (sarcina concentrată de 90 kN) și a forțelor de legătură H_1, V_1 și V_3; simbolurile grafice vor fi totuși păstrate, pentru o mai bună înțelegere a fenomenului.
- Sensurile de alegere ale forțelor de legătură sunt arbitrare, acestea fiind confirmate sau nu de semnul mărimilor obținute din calcul (semn pozitiv – sensul inițial al reacțiunii este valabil, semn negativ – sensul inițial al forței de legătură trebuie inversat).

Calculul forțelor de legătură va porni de la ecuația de echilibru static scrisă în termeni de forțe – bilanț pe direcția orizontală (pe direcție varticală existând un număr de două necunoscute, variantă ineficientă), astfel:

$$\Sigma X = 0, \quad H_1 = 0; \tag{1.1}$$

din absența încărcărilor pe direcție orizontală.

Determinarea cantitativă a reacțiunilor verticale se face scriind ecuațiile de echilibru static (în termeni de momente ale forțelor), în raport (de preferință) cu punctele de rezemare ale structurii; avantajul metodei sugerate este de a elimina câte o necunoscută pe rând (evitarea sistemelor de mai multe ecuații), în plus, calculul greșit al uneia din valori neafectând, în mod direct, valoarea de calcul a celeilalte.

$$\Sigma M_1 = 0, \quad 90 \cdot 1 - V_3 \cdot (1+2) = 0 \Rightarrow V_3 = 30\,\text{kN}; \tag{1.2}$$

$$\Sigma M_3 = 0, \quad 90 \cdot 2 - V_1 \cdot (2+1) = 0 \Rightarrow V_1 = 60\,\text{kN}. \tag{1.3}$$

Obs.

- Regula de semn în scrierea ecuațiilor de bilanț 1.2 și 1.3 ține de preferința celui care efectuează calculul; important este ca termenul dat de V_3, de exemplu, să fie de semn contrar celui din forța concentrată, conform referinței de scriere a ecuației corespunzătoare (reazemul 1);

- Brațul unei forțe se definește ca distanța pe perpendiculara de la direcția suport a forței la punctul sau dreapta considerată ca referință (forță verticală#braț orizontal, forță orizontală#braț vertical).

Calculul se încheie **obligatoriu** cu verificarea valorilor obținute, ecuația de bilanț în acest caz fiind proiecția de forțe pe direcție verticală, astfel:

$$\Sigma Y \stackrel{?}{=} 0, \quad 60 - 90 + 30 = 0; \tag{1.4}$$

în acest caz, expresia fiind ușor verificabilă.

Dacă expresia de verificare nu este satisfăcută, se impune recalcularea mărimilor implicate, în caz contrar problema neputând a fi continuată (rezolvată).

Calculul reacțiunilor mai poate fi abordat și cu aplicații software dedicate, ca de exemplu AxisVM9 Student edition, program de calcul ce are ca bază de lucru Metoda Elementului Finit (F.E.M. – Finite element method). Astfel, modelarea exemplului prezentat anterior conduce la vederea de ansamblu din figura 3, modul de asimilare a schemelor de rezemare respectiv încărcare fiind detaliate în figurile 4 și 5:

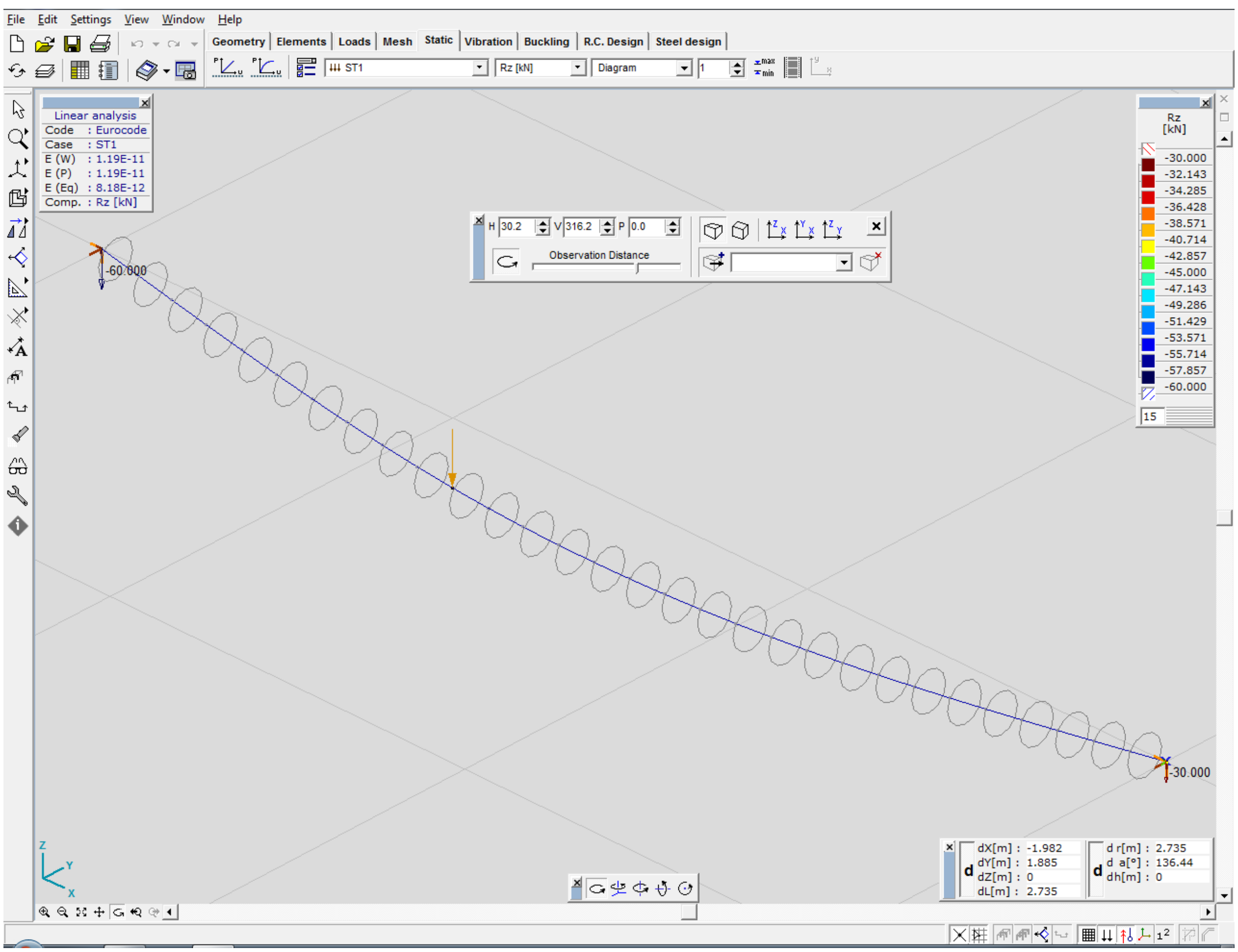


fig. 3 Vedere de ansamblu

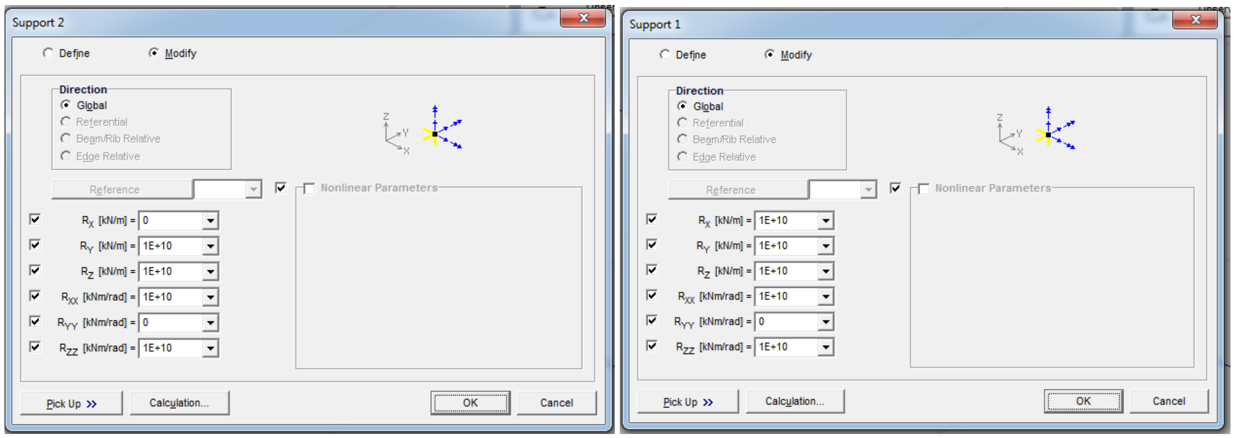


fig. 4 Modelare reazem simplu și reazem articulat

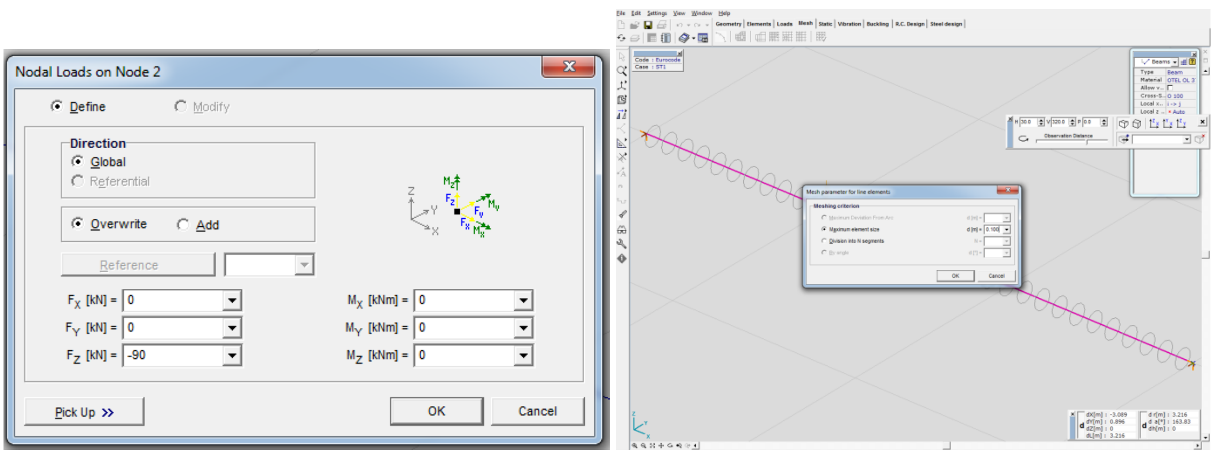
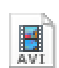


fig. 5 Modelare forță concentrată și discretizare structură

Pentru clarificarea modului de lucru cu tab-urile caracteristice aplicației prezentate se poate urmări simularea efectivă a modului de lucru a structurii, cu observația că, pentru moment, accentul este pus pe valorile forțelor de legătură (reacțiunilor) din reazemele structurii – de remarcat sensul acestora.



(.avi)

Simulare AxisVM pentru problema 2.1.1

1.2.2 Grindă dreaptă simplu rezemată încărcată cu o sarcină uniform distribuită

Se consideră calculul reacțiunilor pentru cazul structurii simplu rezemate din figura 3, astfel:

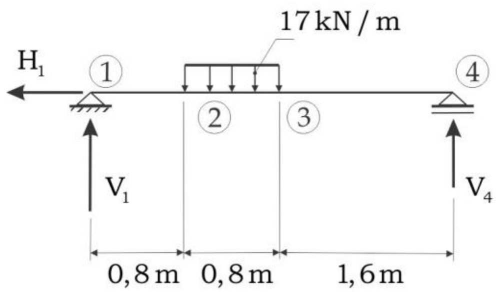


fig. 6

calculul reacțiunii orizontale din reazemul 1 se face din sumă de proiecții de forțe pe direcția corespunzătoare:

$$\Sigma X = 0, \quad H_1 = 0; \tag{1.5}$$

forțele de legătură V_1 și V_4 obținându-se din sume de proiecții de momente de forțe în raport cu punctele de rezemare:

$$\Sigma M_1 = 0, \quad 17 \cdot 0,8 \cdot \left(0,8 + \frac{0,8}{2}\right) - V_4 \cdot 3,2 = 0 \Rightarrow V_4 = 5,1\,\text{kN}; \tag{1.6}$$

$$\Sigma M_4 = 0, \quad 17 \cdot 0,8 \cdot \left(1,6 + \frac{0,8}{2}\right) - V_1 \cdot 3,2 = 0 \Rightarrow V_1 = 8,5\,\text{kN}. \tag{1.7}$$

Obs.

- În cazul unei sarcini distribuite, forța rezultantă a acesteia se obține prin calcularea ariei formei geometrice a distribuitei (in cazul de față dreptunghi, $17 \cdot 0,8$), brațul forței fiind măsurat între centrul de greutate al aceleiași forme geometrice și punctul considerat de referință în scrierea ecuației.

Verificarea corectitudinii valorilor obținute pentru reacțiuni se face prin proiecție de forțe pe direcție verticală, astfel:

$$\Sigma Y = 0, \quad 8,5 - 17 \cdot 0,8 + 5,1 = 0. \tag{1.8}$$

1.2.3 Grindă dreaptă simplu rezemată încărcată cu un moment concentrat

Fie schema de calcul (schemă de rezemare + schemă de încărcare) din figura 4, pentru care se doresc valorile reacțiunilor din reazeme:

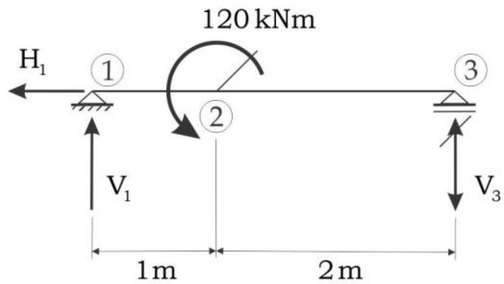


fig. 7

Obs.

- Încărcarea de 120 kNm <u>nu</u> reprezintă o forță; se poate echivala cu un cuplu de forțe egale și de sens contrar, în acest sens fiind grăitoare unitatea de măsură (forța · braț = moment);
- În figura 4, sensul <u>inițial</u> al reacțiunilor verticale a fost luat de jos în sus.

Reacțiunea orizontală din reazemul 1 se obține din echilibru de forțe pe direcție orizontală, astfel:

$$\Sigma X = 0, \quad H_1 = 0; \tag{1.9}$$

iar din sume de moment în raport cu reazemele 1 și 3:

$$\Sigma M_1 = 0, \quad 120 + V_3 \cdot 3 = 0 \Rightarrow V_3 = -40\,\text{kN}; \tag{1.10}$$

respectiv,

$$\Sigma M_3 = 0, \quad 120 - V_1 \cdot 3 = 0 \Rightarrow V_1 = 40\,\text{kN}; \tag{1.11}$$

verificarea reacțiunilor fiind, în acest caz, o formalitate:

$$\Sigma Y = 0, \quad 40 - 40 = 0. \tag{1.12}$$

Obs.

- Încărcările tip moment concentrat <u>nu</u> se înmulțesc cu vreun braț, în caz contrar, în ecuația de echilibru în termeni de moment apărând o valoare măsurată în kNm^2 - incorect din punct de vedere dimensional;
- Valoarea negativă a reacțiunii din reazemul 3 implică schimbarea sensului inițial ales odată cu trecerea mărimii în modul (fig. 4);
- În cazul unui corp simplu rezemat, încărcat în exclusivitate cu un moment concentrat, reacțiunile sunt egale între ele și de semn contrar; reacțiunile formează împreună un cuplu ce se opune acțiunii celui inițial (momentul concentrat din schema de încărcare).

1.3 Caz general. Grindă dreaptă simplu rezemată cu consolă, solicitată de diverse tipuri de încărcări

Se consideră grinda simplu rezemată din figura de mai jos, pentru care se dorește determinarea reacțiunilor din reazeme:

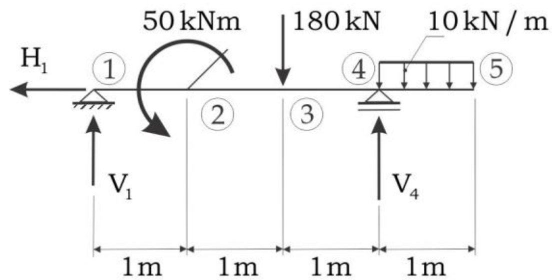


fig. 8

Se calculează valoarea reacțiunii orizontale din reazemul 1:

$$\Sigma X = 0, \quad H_1 = 0; \tag{1.13}$$

se scrie ecuația de momente în raport cu reazemul 1 pentru a se determina reacțiunea verticală din reazemul 3:

$$\Sigma M_1 = 0, \quad -50 + 180 \cdot 2 - V_4 \cdot 3 + 10 \cdot 1 \cdot \left(3 + \frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow V_4 = 115\,\text{kN}; \tag{1.14}$$

respectiv ecuația de momente în raport cu reazemul 4, pentru valoarea reacțiunii verticale din reazemul 1:

$$\Sigma M_4 = 0, \quad V_1 \cdot 3 - 50 - 180 \cdot 1 + 10 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow V_1 = 75\,\text{kN}. \tag{1.15}$$

Verifcarea valorilor obținute se face prin ecuația de proiecții de forțe pe direcția verticală a sistemului de referință, astfel:

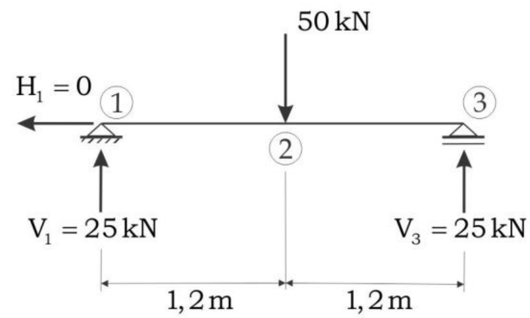
$$\Sigma Y = 0, \quad 75 - 180 + 115 - 10 \cdot 1 = 0; \tag{1.16}$$

problema putând continua.

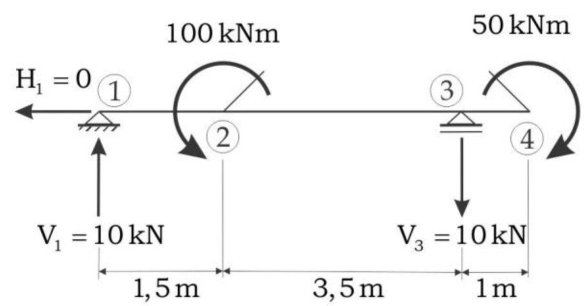
Temă de control

Se cere verificarea corectitudinii valorilor forțelor de legătură pentru următoarele scheme de calcul (este necesară parcurgerea algoritmului complet de calcul și verificare a reacțiunilor):

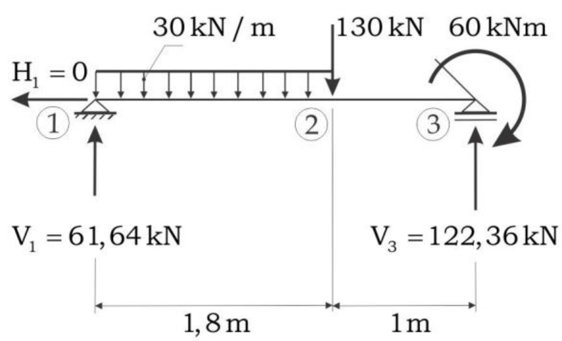
T1



T2



T3



Sugestii de rezolvare și răspunsuri

T1

$$\Sigma X = 0, \quad H_1 = 0;$$
$$\Sigma M_1 = 0, \quad 50 \cdot 1,2 - V_3 \cdot 2,4 = 0 \Rightarrow V_3 = 25\,kN;$$
$$\Sigma M_3 = 0, \quad 50 \cdot 1,2 - V_1 \cdot 2,4 = 0 \Rightarrow V_1 = 25\,kN;$$
$$\text{sau } V_1 = V_2 = \frac{50}{2} = 25\,kN;$$
verificare
$$\Sigma Y = 0, \quad 25 - 50 + 25 = 0.$$

T2

$$\Sigma X = 0, \quad H_1 = 0;$$
$$\Sigma M_1 = 0, \quad -100 + V_3 \cdot 5 + 50 = 0 \Rightarrow V_3 = 10\,kN;$$
$$\Sigma M_3 = 0, \quad V_1 \cdot 5 - 100 + 50 = 0 \Rightarrow V_1 = 10\,kN;$$
$$\text{sau } V_1 = V_3 = \frac{100 - 50}{5} = 10\,kN;$$
verificare
$$\Sigma Y = 0, \quad 10 - 10 = 0.$$

T3

$$\Sigma X = 0, \quad H_1 = 0;$$
$$\Sigma M_1 = 0, \quad 30 \cdot 1,8 \cdot 0,9 + 130 \cdot 1,8 + 60 - V_3 \cdot 2,8 = 0 \Rightarrow V_3 = 122,36\,kN;$$
$$\Sigma M_3 = 0, \quad V_1 \cdot 2,8 - 30 \cdot 1,8 \cdot 1,9 - 130 \cdot 1 + 60 = 0 \Rightarrow V_1 = 61,64\,kN;$$
verificare
$$\Sigma Y = 0, \quad 61,64 - 30 \cdot 1,8 - 130 + 122,36 = 0.$$

2. Calculul forțelor de legătură (reacțiunilor) la sisteme de bare drepte simplu rezemate

2.1 Introducere

Calculul forțelor de legătură reprezintă primul pas (obligatoriu), din algoritmul de abordare al oricărei probleme de Rezistența Materialelor; de corectitudinea modului de parcurgere al acestuia depind ceilalți pași ai rezolvării.

Obiectivul acestui seminar este de a descrie și a exemplifica algoritmul de determinare a valorilor corecte a reacțiunilor corespunzătoare unei scheme de calcul dată, indiferent de gradul de complexitate al acesteia.

Vor fi dobândite competențe de stabilire și determinare cantitativă a valorilor corecte ale forțelor de legătură corespunzătoare schemei de rezemare date, în scopul utilizării acestora în cadrul treptelor ulterioare ale algoritmului general de rezolvare al unei probleme de Rezistența Materialelor.

Durata medie de studiu individual pentru această prezentare este de circa 90 de minute.

2.2 Cazuri elementare

2.2.1 Sistem de bare simplu rezemat încărcat cu două sarcini concentrate

Se consideră sistemul de bare simplu rezemat din figura 1, pentru care se doreşte determinarea forțelor de legătură (reacțiuni), la nivelul reazemelor structurii:

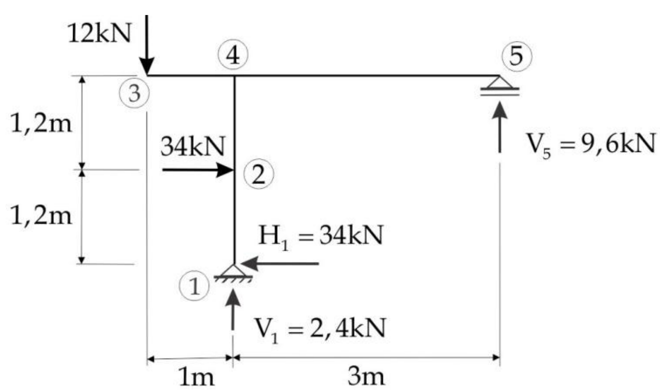


fig.1

Obs.

- Determinarea forțelor de legătură în cazul sistemelor de bare cu reazeme ce nu se găsesc pe aceeaşi varticală sau orizontală în raport cu axele sistemului de referință (reazeme "dezaxate"), începe <u>în mod obligatoriu</u> cu sumă de proiecții de forțe pe direcția cu număr minim de necunoscute de aflat; în cazul problemei din figura 1, se determină H_1 din sumă de proiecții de forțe pe orizontală, mărimea astfel determinată intervenind, mai apoi, în relația de calcul a reacțiunii V_5 (vezi ecuația 2.3).

Calculul reacțiunii orizontale din reazemul 1 se face din sumă de proiecții de forțe pe direcție orizontală:

$$\Sigma X = 0, \quad H_1 - 34 = 0 \Rightarrow H_1 = 34\text{kN}; \tag{2.1}$$

forțele de legătură V_1 şi V_5 obținându-se din sume de proiecții de momente de forțe în raport cu punctele de rezemare, astfel:

$$\Sigma M_1 = 0, \quad 34 \cdot 1,2 - 12 \cdot 1 - V_5 \cdot 3 = 0 \Rightarrow V_5 = 9,6\text{kN}; \tag{2.2}$$

$$\Sigma M_5 = 0, \quad 12 \cdot 4 - V_1 \cdot 3 - \overset{H_1}{34} \cdot 2,4 + 34 \cdot 1,2 = 0 \Rightarrow V_1 = 2,4\text{kN}. \tag{2.3}$$

Verificarea corectitudinii valorilor obținute se face prin proiecție de forțe pe direcția verticală a sistemului de referință (ecuație de echilibru ce nu a mai fost utilizată până acum), de unde:

$$\Sigma Y = 0, \quad 12 - 2,4 - 9,6 = 0. \tag{2.4}$$

Obs.

- Dacă expresia de verificare nu este satisfăcută, se impune recalcularea mărimilor implicate, în caz contrar problema neputând a fi continuată (rezolvată).

2.2.2 Sistem de bare simplu rezemat încărcat cu două sarcini uniform distribuite

Pentru sistemul de bare încărcat în planul său din figura 2, se cere determinarea valorii reacțiunilor din reazeme:

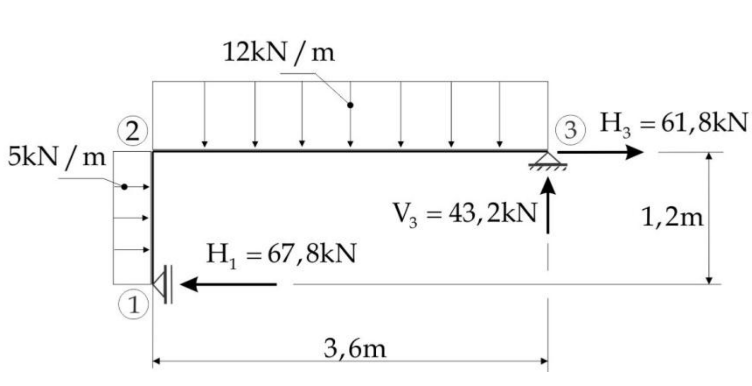


fig.2

Reacțiunea verticală din reazemul 3 se determină din proiecții de forțe pe direcție verticală (ecuație de echilibru cu o singură necunoscută), astfel:

$$\Sigma Y = 0, \quad 12 \cdot 3{,}6 - V_3 = 0 \Rightarrow V_3 = 43{,}2\text{kN}; \tag{2.5}$$

din sume de momente de forțe în raport cu punctele de rezemare 1 şi 3:

$$\Sigma M_1 = 0, \quad 5 \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}6 + 12 \cdot 3{,}6 \cdot 1{,}8 - \overset{V_3}{43{,}2} \cdot 3{,}6 + H_3 \cdot 1{,}2 = 0 \Rightarrow H_3 = 61{,}8\text{kN}, \tag{2.6}$$

respectiv,

$$\Sigma M_3 = 0, \quad H_1 \cdot 1{,}2 - 5 \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}6 - 12 \cdot 3{,}6 \cdot 1{,}8 = 0 \Rightarrow H_1 = 67{,}8\text{kN}. \tag{2.7}$$

Relația de verificare implică utilizarea ecuației de bilanț de forțe pe direcție orizontală, astfel:

$$\Sigma X = 0, \quad 5 \cdot 1{,}2 - 67{,}8 + 61{,}8 = 0, \tag{2.8}$$

corectitudinea calculului fiind confirmată.

2.2.3 Sistem de bare simplu rezemat încărcat cu două momente concentrate

Se cere determinarea reacțiunilor din reazemele sistemului de bare din figura 3:

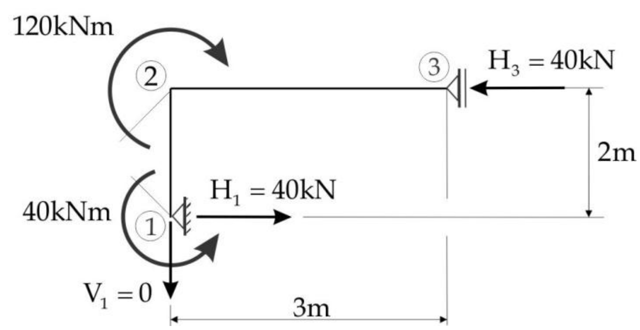


fig.3

Algoritmul de rezolvare porneşte de la determinarea componentei verticale a reacțiunii din reazemul articulat 1, astfel:

$$\Sigma Y = 0 \Rightarrow V_1 = 0; \tag{2.9}$$

reacțiunile orizontale fiind găsite din sume de momente de forțe în raport cu reazemele 1 şi 3:

$$\Sigma M_1 = 0, \quad 40 - 120 + H_3 \cdot 2 = 0 \Rightarrow H_3 = 40\text{kN}, \tag{2.10}$$

$$\Sigma M_3 = 0, \quad 40 + H_1 \cdot 2 - 120 = 0 \Rightarrow H_1 = 40\text{kN}. \tag{2.11}$$

Etapa de calcul se încheie (obligatoriu) cu verificare:

$$\Sigma X=0,\quad 40-40=0. \tag{2.12}$$

2.3 Caz general. Sistem de bare plan, încărcat în planul său, simplu rezemat, cu diverse tipuri de încărcări

Se cere calculul reacțiunilor pentru sistemul de bare din figura de mai jos:

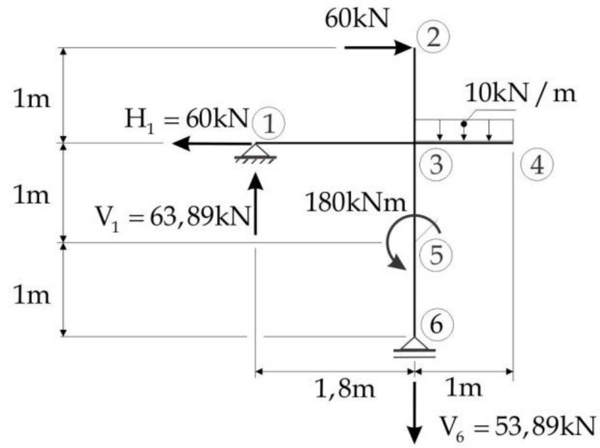


fig.4

Se determină forța de legătură orizontală din reazemul 1:

$$\Sigma X=0,\quad H_1-60=0\Rightarrow H_1=60kN, \tag{2.13}$$

apoi, din sume de momente în raport cu secțiunile caracteristice 1 şi 6, valorile reacțiunilor verticale:

$$\Sigma M_1=0,\quad 60\cdot 1+10\cdot 1\cdot(1,8+0,5)-180+V_6\cdot 1,8=0\Rightarrow V_6=53,89kN, \tag{2.14}$$

$$\Sigma M_6=0,\quad \overset{H_1}{60}\cdot 2-V_1\cdot 1,8-60\cdot 3-10\cdot 1\cdot 0,5+180=0\Rightarrow V_1=63,89kN. \tag{2.15}$$

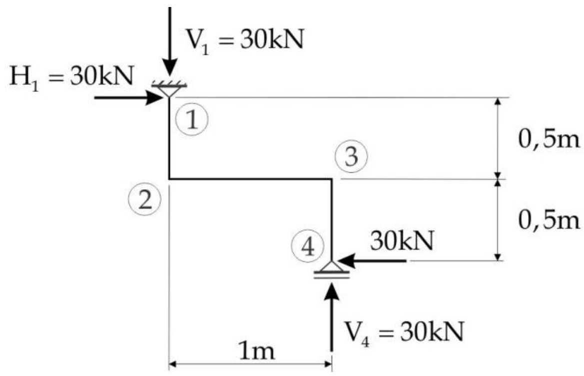
Verifcarea valorilor obținute se face prin ecuația de proiecții de forțe pe direcția verticală a sistemului de referință, astfel:

$$\Sigma Y=0,\quad 63,89-10\cdot 1-53,89=0. \tag{2.16}$$

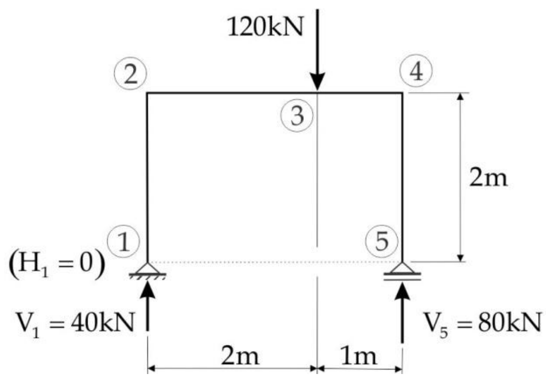
Temă de control

Se cere verificarea corectitudinii valorilor forțelor de legătură pentru următoarele scheme de calcul (este necesară parcurgerea algoritmului complet de calcul și verificare a reacțiunilor):

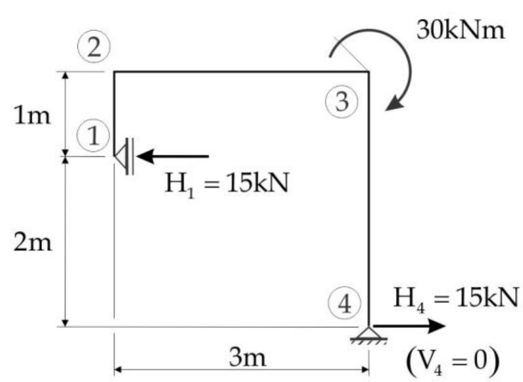
T1



T2



T3



Sugestii de rezolvare și răspunsuri

T1

$$\Sigma X = 0, \quad H_1 = 30\text{kN};$$
$$\Sigma M_1 = 0, \quad 30(0,5+0,5) - V_4 \cdot 1 = 0 \Rightarrow V_4 = 30\text{kN};$$
$$\Sigma M_4 = 0, \quad \overset{H_1}{30}(0,5+0,5) - V_1 \cdot 1 = 0 \Rightarrow V_1 = 30\text{kN};$$
verificare
$$\Sigma Y = 0, \quad \overset{V_1}{30} - \overset{V_3}{30} = 0.$$

T2

$$\Sigma X = 0, \quad H_1 = 0;$$
$$\Sigma M_1 = 0, \quad 120 \cdot 2 - V_5 \cdot 3 = 0 \Rightarrow V_5 = 80\text{kN};$$
$$\Sigma M_5 = 0, \quad V_1 \cdot 3 - 120 \cdot 1 = 0 \Rightarrow V_1 = 40\text{kN};$$
verificare
$$\Sigma Y = 0, \quad 40 - 120 + 80 = 0.$$

T3

$$\Sigma Y = 0, \quad V_4 = 0;$$
$$\Sigma M_1 = 0, \quad 30 - H_4 \cdot 2 = 0 \Rightarrow H_4 = 15\text{kN};$$
$$\Sigma M_4 = 0, \quad H_1 \cdot 2 - 30 = 0 \Rightarrow H_1 = 15\text{kN};$$
verificare
$$\Sigma X = 0, \quad 15 - 15 = 0.$$