

1. Introducere în problemă

1.1. Generalități

Scopul acestei lecții este de a crea spațiul de discuție necesar abordării chestiunilor specifice disciplinei Rezistența Materialelor.

Paragraful 1.1.1 explică semnificația obiectului de studiu în sine precum și tipurile fundamentale de probleme ce pot fi rezolvate în cadrul acestuia, rolul paragrafelor 1.1.2 și 1.1.3 fiind de a clasifica sintetic corpurile studiate precum și încărcările ce sunt aplicate acestora.

Paragrafele 1.1.4÷1.1.8 tratează, deasemeni, chestiuni elementare legate de ipotezele de lucru considerate a fi valabile în Rezistența Materialelor, noțiuni precum rezistența admisibilă sau coeficientul de siguranță, metode generale de rezolvare, implicit condițiile de îndeplinit în soluționarea problemelor precum și unele aspecte fundamentale ale disciplinei.

Timpul alocat pentru studiul capitolului 1.1, inclusiv parcurgerea testelor de auto-evaluare este de circa 1,5 ore.

După parcurgerea capitolului 1.1, studentul va fi capabil:

- să recunoască și să modeleze corect, în scopul unor abordări ulterioare, diversele tipuri de corpuri studiate precum și încărcările asociate acestora;
- să estimeze corect posibilitatea de a rezolva sau nu o problemă dată, cu ajutorul metodelor specifice Rezistenței Materialelor;
- să definească și să utilizeze diversele variante de metode de rezolvare, implicit să stabilească criteriile (condițiile) de îndeplinit în soluționarea diverselor probleme.

1.1.1 Obiectul și problemele Rezistenței materialelor

Obiect – stabilirea metodelor pentru calculul eforturilor unitare, deformațiilor și deplasărilor ce se produc, sub acțiunea încărcărilor, în organele de mașini și diverse alte elemente componente, în scopul dimensionării și/sau verificării acestora.

Relații cu alte discipline – spre deosebire de Mecanica teoretică, unde se admite modelul corpului rigid, nedeformabil, Rezistența materialelor, studiind efectul forțelor pe și *în interiorul* corpurilor, va trebui să țină seama obligatoriu de proprietatea de deformabilitate a corpurilor; în Rezistența materialelor se admite modelul corpului deformabil (a cărui configurație geometrică se modifică sub acțiuni exterioare, cu observația că modificările geometrice au drept consecință apariția unor forțe interioare între particulele structurale ale corpului în discuție).

Față de Mecanica teoretică, unde toate forțele sunt considerate vectori alunecători, în Rezistența materialelor forțele sunt vectori legați (fig.1).

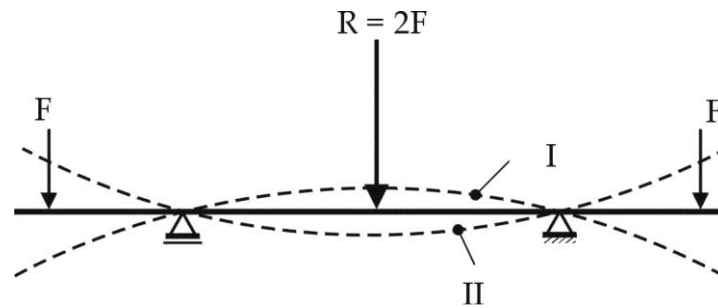


fig.1

Probleme specifice – în principiu, în Rezistența materialelor apar trei parametri (mărimi), astfel:

- forța (încărcarea) ce acționează asupra structurii;
- caracteristicile geometrice ale structurii;
- efortul unitar (tensiunea) ce ia naștere la nivelul secțiunii periculoase a structurii.

Problemele pe care le rezolvă Rezistența materialelor sunt:

probleme de dimensionare – forțele aplicate sunt cunoscute și se face alegerea materialului după diverse criterii prealabile; dimensiunile elementului de structură rezultă din condițiile ca forțele interne (implicit tensiunile) și deformațiile să **nu** depășească anumite valori limită

probleme de verificare – cunoscând forțele exterioare și caracteristicile geometrice (dimensiuni) ale structurii, se impune și se verifică **nedepășirea** valorilor limită prescrise pentru tensiuni și/sau deformații.

probleme de determinare a efortului capabil – sunt cunoscute caracteristicile geometrice ale elementului și trebuie știute/determinate forța și/sau momentul **limită** suportabile la nivelul secțiunii periculoase.

1.1.2 Clasificarea corpurilor

Barele reprezintă corpuri la care una din dimensiuni este mare în raport cu celelalte două; elementele caracteristice ale unei bare sunt axa sa longitudinală precum și forma și dimensiunile secțiunii (normale) transversale. Astfel, după forma axei longitudinale barele pot fi drepte, curbe plane sau curbe în spațiu, cu diverse forme de secțiuni.

O categorie specială de bare o constituie firele, la care secțiunea transversală a barei are dimensiuni mult mai mici în comparație cu lungimea; axa longitudinală este nu fixă, categorie de corpuri care nu suportă decât forțe axiale de întindere.

Plăcile sunt corpuri la care două dimensiuni sunt mari în raport cu a treia. Locul geometric al mijloacelor grosimii plăcii se numește *suprafață mediană*, grosimea plăcii măsurându-se perpendicular pe suprafața mediană; plăcile pot fi plane sau curbe.

Blocurile sunt corpuri cu toate cele trei dimensiuni comparabile.

Din punctul de vedere al studiului, pentru corpurile de tip bară sau fir se pot utiliza metodele furnizate de Rezistența materialelor; pentru corpurile din celelalte două categorii, la care studiul stării de eforturi și deformații este mult îngreuiat, **nu** pot fi aplicate relațiile tip Rezistența materialelor, utilizându-se Teoria elasticității, Teoria plasticității, etc.

1.1.3 Clasificarea încărcărilor (forțelor)

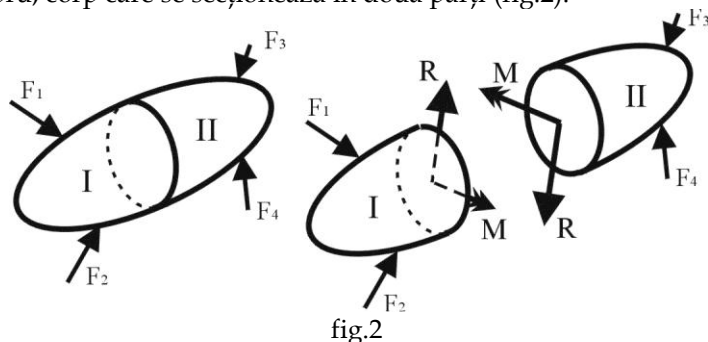
Forțele exterioare care acționează asupra unui corp sunt *forțe active*, care tind să imprime corpului o mișcare, aceste forțe fiind denumite sarcini sau încărcări și respectiv forțe care se opun tendinței de deplasare a corpului, numite reacțiuni.

Criterii de clasificare:

- după dimensiunea suprafeței pe care se aplică:
 - forțe concentrate: teoretic, se aplică într-un punct;
 - forțe distribuite: se caracterizează numeric prin intensitatea pe unitatea de lungime sau suprafață.
- după poziția zonei unde se aplică forțele în raport cu corpul:
 - forțe de suprafață;
 - forțe masice și de volum.
- după modul de variație în timp a intensității forțelor:

- forțe statice – forțe care încarcă treptat structura, începând de la intensitate nulă, la intensitate finală, rămânând apoi constante pe timp nedefinit; **nu** produc efecte dinamice asupra structurii;
- forțe dinamice – forțe a căror intensitate se modifică în timp atât de repede, încât provoacă accelerații sensibile punctelor materiale ale corpului; sunt forțe caare se aplică brusc și produc șocuri și forțe variabile în timp.

Forțele interioare; cu reprezentarea din figura de mai jos se consideră un corp supus la un grup de forțe exterioare în echilibru, corp care se secționează în două părți (fig.2).



Pentru păstrarea echilibrului corpului astfel secționat trebuie să acționeze forțe interne corespunzătoare; forțele interioare de pe cele două fețe ale secțiunii astfel determinate sunt egale și de sens contrar (reprezintă forțele de legătură ce se opun separării corpului).

Mărimile M și R reprezintă forțele interioare sau eforturile la nivelul secțiunii efectuate; descompunerea celor două eforturi în raport cu axele sistemului de referință conduce la obținerea, în cazul general al problemei, a unui număr de șase componente, trei forțe și trei momente, după cum se poate vedea în figura 3.

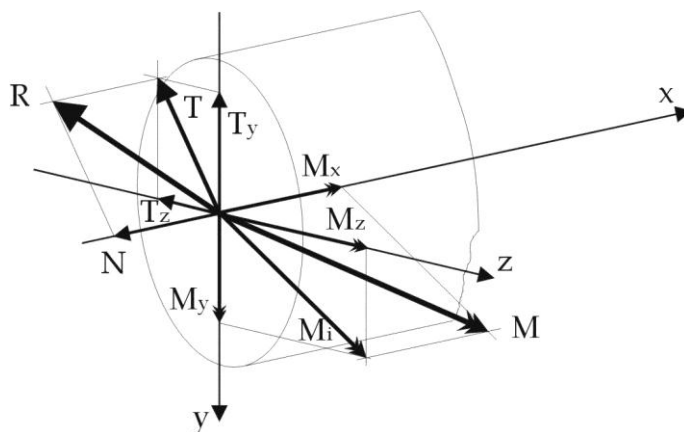


fig.3

Astfel, R are o componentă după axa longitudinală a barei (axa x), denumită **forță axială** N respectiv o componentă T denumită **forță tăietoare**, care la rândul ei se poate descompune după axele sistemului de referință în componentele forței tăietoare T_y și T_z ; M se descompune în **momentul de torsiune** M_x și un **moment încovoietor** M_i , la rândul său generând componentele momentului încovoietor M_y și M_z .

Mărimile N , T_y , T_z , M_x , M_y , M_z se numesc eforturi; fiecărui efort îi corespunde o solicitare simplă:

- Întindere – compresiune - solicitarea produsă de forța axială N ;
- Tăiere sau forfecare – solicitarea produsă de componentele forței tăietoare T_y , T_z ;
- Torsiune sau răsucire – solicitare produsă de momentul de torsiune M_x ;
- Încovoiere – solicitarea produsă de componentele momentului încovoietor M_y , M_z .

Solicitățile compuse corespund cazului când apar simultan cel puțin două eforturi în secțiune.

1.1.4 Ipoteze în Rezistența Materialelor

În tratarea problemelor propuse *Rezistența Materialelor* operează cu o serie de ipoteze privitoare la structura materialelor și comportarea solidului sub sarcini. Principalele ipoteze de acest fel sunt

- *Ipoteza mediului continuu și omogen*: se consideră solidul ca mediu continuu și omogen, ocupând întregul spațiu corespunzător volumului său.
 - *Ipoteza izotropiei materialelor*: se consideră solidul ca având proprietăți identice pe toate direcțiile.
 - *Ipoteza stării naturale a corpurilor*: se admite că mai înainte de intrarea în acțiune a forțelor care produc solicitarea, în corp nu există forțe interioare.
 - *Corpurile studiate sunt în echilibru static sau dinamic*: astfel, în primul caz, în ecuațiile de echilibru intervin forțe statice reprezentând acțiuni și reacțiuni, iar în cel de-al doilea, se adaugă efectul forțelor de inerție.
 - *Ipoteza elasticității perfecte*: se consideră că deformațiile dispar complet odată cu dispariția sarcinilor care le-au produs.
- Ipoteza deformațiilor mici*: deformațiile se consideră mici în raport cu dimensiunile corpurilor. De aceea se pot scrie ecuațiile de echilibru ca în statică; se neglijează în calcule, puterea a doua (sau superioară) a deformațiilor, ca infinit mic de rang superior.
- *Relația liniară între tensiuni și deformații specifice*; se adoptă curba caracteristică schematizată corespunzătoare modelului elasto-plastic. Rezultă că pentru valori ale deformațiilor care nu depășesc ϵ_c este valabilă legea lui Hooke: $\sigma = E\epsilon$, adică tensiunile sunt proporționale cu deformațiile.
 - *Principiul lui Saint-Venant*: dacă se înlocuiesc forțele care acționează asupra unui element de suprafață al unui corp elastic printr-un alt sistem de forțe, echivalent cu primul din punct de vedere static, a doua distribuție de forțe produce la locul de aplicare diferențe apreciable față de prima, dar rămâne fără efect sau cu efect neglijabil la distanțe mari față de locul de aplicare a forțelor.
 - *Ipoteza lui Bernoulli* (sau a secțiunilor plane); o secțiune plană, normală pe axa barei înainte de deformare rămâne plană și normală pe axă și după deformare.

1.1.5 Rezistențe admisibile. Coeficienți de siguranță

Piesele de mașini trebuie astfel dimensionate, încât să fie exclus pericolul ruperii, al existenței deformațiilor mari sau al fenomenului de pierdere a stabilității. Tensiunile trebuie să fie sub limita de elasticitate dar, din rațiuni economice, cât mai aproape de aceasta, cerință sensibilă, deoarece pentru o bună siguranță a integrității solidului, tensiunile trebuie să fie cât mai departe de limita de elasticitate pentru a nu se ajunge la deformații mari.

Valoarea limită a tensiunii până la care poate fi solicitat un material poartă numele de **rezistență admisibilă** (σ_a).

Rezistența admisibilă se consideră fie în raport cu limita de curgere σ_c (pentru materialele ductile), fie în raport cu limita de rupere σ_r (pentru materialele casante).

Raportul între *tensiunea limită și rezistența admisibilă* reprezintă coeficientul de siguranță (c); astfel, se definesc:

$$c_c = \frac{\sigma_c}{\sigma_a}; \quad c_r = \frac{\sigma_r}{\sigma_a},$$

în care: c_c – coeficientul de siguranță la curgere;

c_r – coeficientul de siguranță la rupere.

Pentru o funcționare optimă a piesei trebuie îndeplinită condiția:

$$c \geq c_a,$$

cu c_a fiind notat coeficientul de siguranță admisibil; acest coeficient se determină astfel încât să aibă cele mai mici valori pentru care se obține o siguranță deplină a funcționării piesei pe o durată cât mai îndelungată de solicitare.

1.1.6 Metode de rezolvare

Rezolvarea problemelor din *Rezistența Materialelor* se face prin metode generale și proprii, dintre care sunt reprezentative:

- **Metoda rezistențelor admisibile** (metodă deterministă), comportând exprimarea valorilor acestui parametru (σ_a) prin condiția:

$$\sigma_{\max}^{\text{ef}} \leq \sigma_a,$$

unde $\sigma_{\max}^{\text{ef}}$ simbolizează tensiunea efectivă maximă la nivelul elementului în discuție. Metoda adoptă un coeficient de siguranță unic, cu anumite rezerve sub raportul justificării/confirmării în practică.

- **Metoda stărilor limită** (metodă semiprobabilistică); prin *stare limită* se înțelege un stadiu de solicitare a cărui atingere implică pierderea reversibilă sau ireversibilă a capacității solidului/corpului de a satisface condițiile de utilizare.

Pentru materiale omogene (metale, ș.a.), expresia de calcul conformă metodelor uzuale este:

$$\sigma_{\max} \leq m \cdot R,$$

în care: σ_{\max} - valoarea maximă probabilă a tensiunii;

R - rezistența de calcul (valoarea minimă probabilă a rezistenței);

m - coeficient ce ține seama de reducerea sau majorarea rezistențelor de calcul în cazuri specifice ale unor solicitări.

1.1.7 Condiții de îndeplinit în soluționarea problemelor din Rezistența Materialelor

Prevalent în *Rezistența Materialelor* este studiul tensiunilor și deformațiilor, dar la fel de importantă este și determinarea sau/și verificarea condițiilor de stabilitate a elementelor structurale ale corpurilor în scopul dimensionării optime. Se convine ca elementele structurale să satisfacă următoarele cerințe/condiții:

- *Condiții de rezistență*: tensiunile nu trebuie să depășească anumite limite stabilite experimental pentru fiecare material, respectiv:

$$\sigma_{\max}^{\text{ef}} \leq \sigma_a.$$

- *Condiții de rigiditate*: funcționarea organelor de mașini este condiționată de deformațiile acestora, deformații care nu trebuie să depășească anumite limite, respectiv:

$$\Delta_{\max}^{\text{ef}} \leq \Delta_a.$$

- *Condiții de stabilitate*: peste anumite valori critice ale sarcinilor, piesele își pierd echilibrul stabil, ceea ce poate duce la distrugerea acestora; valoarea maximă a unei sarcini se poate exprima:

$$F_{\max} = \frac{F_{\text{cr}}}{c},$$

în care: F_{cr} - forța critică la care poziția de echilibru elastic a barei devine instabilă;

c - un coeficient de siguranță (la stabilitate).

1.1.8 Aspecte ale Rezistenței Materialelor

În abordarea și dezvoltarea/tratarea problemelor de rezistență se disting trei aspecte:

- *Aspectul static*, care configurează problema astfel, încât solicitările de referință sunt reduse la forțele interne într-un punct sau într-o secțiune, cu utilizarea ecuațiilor de echilibru static;
- *Aspectul geometric*, care se rezumă la examinarea deformațiilor solidului încărcat;
- *Aspectul fizic*, care presupune un fundament experimental, permițând stabilirea conexiunilor între forțele interne (tensiuni) și deformații.

Bibliografie

- Andreescu I., Mocanu Șt.,- *Compendiu de Rezistența Materialelor* (curs), Ed. MatrixRom, București, 2005, ISBN 973-685-869-3, (Cap.1, p.
- Ungureanu I., Ispas B., Constantinescu E.,- *Rezistența Materialelor I* (curs), Universitatea Tehnică de Construcții București, 1995, (Cap.1, p.1÷9).

- Suport de curs de Rezistența Materialelor (ing.zi, ing.seral), format multimedia și site – Mocanu Șt., ediție de uz intern, Facultatea de Utilaj Tehnologic, 2006, (curs1).

Test de autoevaluare 1.1

1. Explicați succint în ce constă obiectul Rezistenței Materialelor.
2. Rezistența Materialelor ține seama de proprietatea de deformabilitate a corpurilor ? (adevărat/fals).
3. Din punctul de vedere al studiului, plăcile fac parte din categoria de corpuri ce pot fi abordate prin metodele Rezistenței Materialelor ? (adevărat/fals).
4. Dați un exemplu de sarcină distribuită cu unitatea de suprafață.
5. În Rezistența Materialelor este valabilă ipoteza deformațiilor mici. (adevărat/fals).
6. În ce constă respectarea condiției de rezistență în cazul soluționării unei probleme de R.M.?
7. La ce se referă aspectul geometric din cadrul abordării/dezvoltării chestiunilor de rezistență?

Sugestii privind rezolvarea testului de autoevaluare 1.1

1. Vezi definiția de la pag.1.
2. Adevărat
3. Fals
4. Pata de contact a unui pneu auto pe calea de rulare, greutatea distribuită pe fața inferioară a plăcii de snowboard, etc.
5. Adevărat
6. Vezi definiția de la pagina 5.
7. Vezi definiția de la pagina 5.

1.2 Diagrame de eforturi la sisteme static determinate. Bare drepte

Scopul acestui capitol este de a stabili setul elementar de reguli de trasare a diagramei de efort în cadrul disciplinei Rezistența Materialelor.

Paragraful 1.2.1 reamintește principalele tipuri de reazeme întâlnite la nivelul schemelor de rezemare ale diverselor structuri, rolul paragrafului 1.2.2 fiind de a redefini tipurile de ecuații de echilibru ce se pot utiliza pentru determinarea forțelor de legătură din reazemele structurii.

Paragrafele 1.2.3÷1.2.5 stabilesc definițiile, convențiile și unele aspecte matematice necesare trasării corecte a diagramei de efort secțional la bare drepte.

Timpul alocat pentru studiul capitolului 1.2, inclusiv parcurgerea testelor de auto-evaluare este de circa 2 ore.

După parcurgerea capitolului 1.2, studentul va fi capabil:

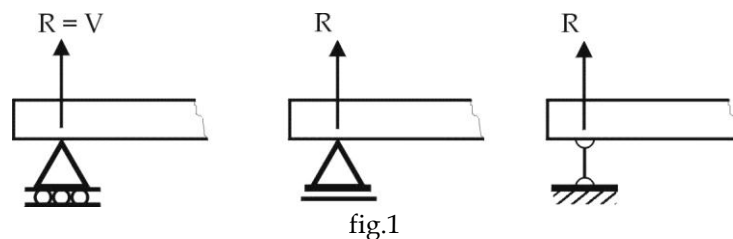
- să stabilească și să determine corect valorile reacțiilor din diverse reazeme;
- să traseze corect modul de variație în lungul barei, pentru diverse tipuri de efort secțional;
- să identifice și să corecteze în timp util diversele eventuale greșeli de trasare.

1.2.1 Reazeme și reacțiuni

Reazemul reprezintă legătura unei structuri cu mediul înconjurător; reacțiunea este forța de legătură între reazem și structură.

Tipurile principale de reazeme cu care se operează sunt:

- reazemul simplu (fig.1) - permite mișcare de translație pe direcția paralelă cu suprafața de rezemare și rotație în jurul punctului de rezemare, nu permite deplasare pe direcția normalei la suprafața de rezemare, are drept echivalent static o forță de direcție normală la suprafața de rezemare (talpă);



- articulație în plan (fig. 2) - permite doar rotația în jurul punctului de articulație, nu permite deplasare de vreun fel, are drept echivalent static două forțe (componentele după direcția axelor de referință ale unei forțe de direcție oarecare, R);

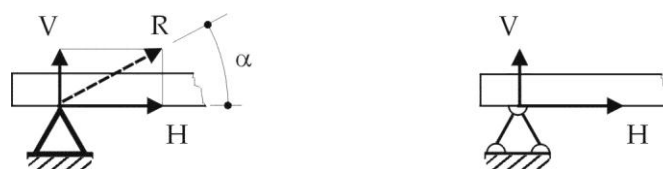


fig.2

- articulație în spațiu sau sferică (fig.3) – permite rotire în spațiu în jurul punctului de articulație, nu permite deplasări, are drept echivalent static trei necunoscute reprezentate prin componentele reacțiunii generale R după cele trei direcții ale sistemului de axe de referință;

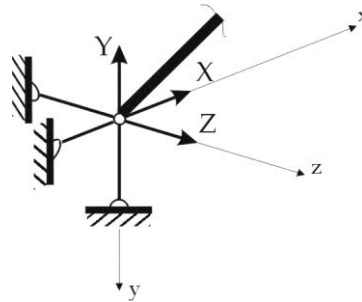


fig.3

- încastrare (în plan) – nu permite translații sau rotații de vreun fel, are drept echivalent static două forțe și un moment (fig.4);

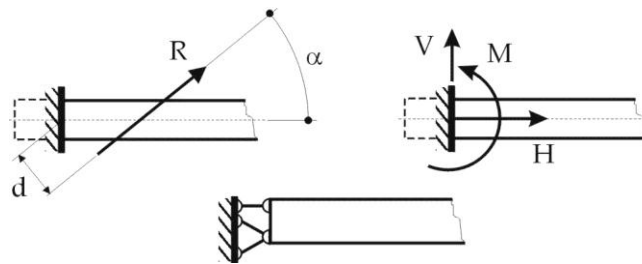


fig.4

- încastrare (în spațiu) – nu permite translații sau rotații de vreun fel, are drept echivalent static trei forțe și trei momente (fig.5);

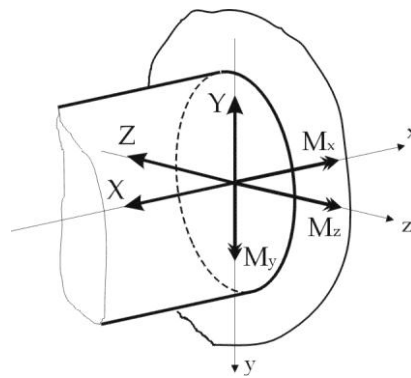


fig.5

1.2.2 Ecuații de echilibru

Dintre posibilitățile de scriere a ecuațiilor de echilibru cunoscute din Mecanica teoretică, cele care convin și la care se apelează pentru găsirea reacțiunilor sunt:

- în cazul consolelor (fig.6):

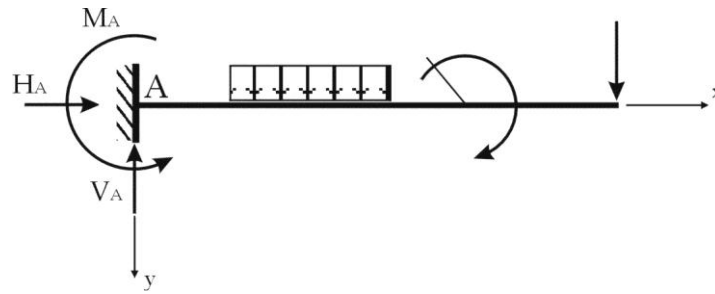


fig.6

$$\sum X = 0 \Rightarrow H_A, \quad \sum Y = 0 \Rightarrow V_A, \quad \sum M_A = 0 \Rightarrow M_A;$$

- în cazul barelor simplu rezemate (fig.7):

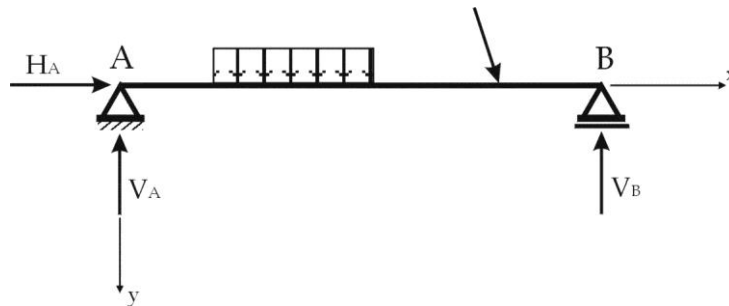


fig.7

$$\sum X = 0 \Rightarrow H_A, \quad \sum M_A = 0 \Rightarrow V_B, \quad \sum M_B = 0 \Rightarrow V_A.$$

1.2.3 Eforturi secționale la bare drepte. Definiții, convenții

Se consideră o bară solicitată de sistemul de forțe în echilibru P_1, P_2, \dots, P_n ; pentru determinarea eforturilor corespunzătoare unei secțiuni oarecare "i", se secționează bara după un plan normal la axa sa longitudinală (fig.8).

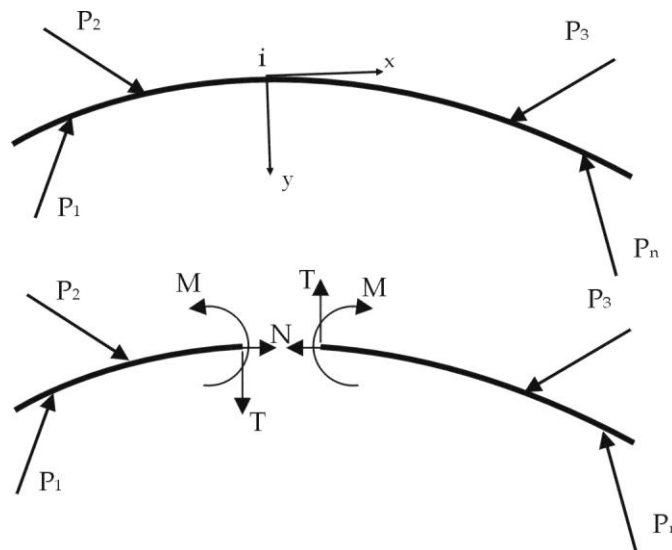


fig.8

Astfel, pe cele două fețe ale secțiunii "i" au fost introduse cele trei eforturi ce alcătuiesc sistemul static echivalent al părților îndepărtate (pe fața din dreapta sistemul corespunzător părții îndepărtate din stânga și viceversa). Cele trei eforturi secționale se pot defini după cum urmează:

- forța axială N , reprezintă suma proiecțiilor după axa longitudinală (sau tangenta la bară), a tuturor forțelor de la stânga secțiunii SAU a celor de la dreapta; N se consideră pozitivă dacă tinde să tragă sau să întindă tronsonul de bară asupra căruia acționează;
- forța tăietoare T , reprezintă suma proiecțiilor după normala la axa longitudinală a barei (sau normala la tangenta în secțiune), a tuturor forțelor de la stânga secțiunii SAU a celor de la dreapta; T se consideră pozitivă dacă tinde să rotească în sens orar tronsonul de bară asupra căruia acționează;
- momentul încovoietor M , reprezintă suma momentelor, în raport cu centrul de greutate al secțiunii, a tuturor forțelor de la stânga secțiunii SAU a celor de la dreapta; M se consideră pozitiv când, din punct de vedere fizic, tinde să întindă fibra inferioară (de jos) și să o comprime pe cea superioară (de sus), pe tronsonul de bară pe care acționează.

Pentru semn negativ vor fi luate în considerare regulile inverse celor prezentate; forța axială este negativă dacă intră sau comprimă tronsonul de bară în discuție, forța tăietoare are semn negativ când tinde să rotească în sens antiorar porțiunea de bară analizată iar momentul încovoietor va fi negativ când tinde să întindă fibra superioară și să o comprime pe cea inferioară.

Rezolvarea diagramelor de eforturi pentru o structură dată reprezintă, în fapt, trasarea modului de variație în lungul barei (barelor) a valorii eforturilor secționale definite. Reprezentarea se face în raport cu o linie de referință (sau un sistem de linii), care modelează axa longitudinală a barei (sistemului de bare); se convine ca în atare grafice valorile **pozitive** să fie reprezentate astfel:

- pentru momentele încovoietoare, SUB linia de referință (de partea fibrei întinse);
- pentru forța axială sau forța tăietoare, DEASUPRA liniei de referință corespunzătoare.

1.2.4 Relații diferențiale între eforturi și încărcări

Se consideră o bară solicitată de un sistem plan de forțe exterioare concentrate și forțe distribuite continuu; se izolează un element de lungime dx prin două secțiuni transversale. Pe secțiunea din stânga se figurează eforturile secționale corespunzătoare cu semn convențional pozitiv, iar pe secțiunea din dreapta aceleași mărimi, ținându-se seama de creșterile diferențiale dN , dT și dM datorate trecerii de la o secțiune a alta (fig.9).

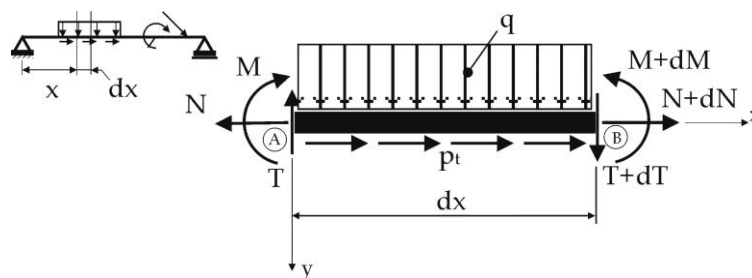


fig.9

Prin exprimarea echilibrului elementului diferențial astfel considerat, se obțin:

$$\sum X = 0 \Rightarrow -N + p_t \cdot dx + N + dN = 0 \quad \text{sau} \quad \frac{dN}{dx} = -p_t;$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow T - q \cdot dx - T - dT = 0 \quad \text{sau} \quad \frac{dT}{dx} = -q;$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow M - q \cdot dx \cdot \frac{dx}{2} - M - dM + T \cdot dx = 0 \quad \text{sau} \quad T = \frac{dM}{dx}.$$

Interpretarea relațiilor astfel obținute:

- derivata (panta) forței axiale, în raport cu axa x , este egală în modul cu intensitatea sarcinii uniform distribuite după tangenta la axa longitudinală a barei;
- derivata (panta) forței tăietoare, în raport cu axa x , este egală în modul cu intensitatea sarcinii uniform distribuite după normala la axa barei;
- derivata (panta) momentului încovoietor, în raport cu axa x , este egală cu forța tăietoare.

Prin combinarea ultimelor două relații diferențiale astfel obținute se ajunge la un corolar al acestora, astfel:

$$\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dT}{dx} = -q.$$

Observații (utile la trasarea și verificarea diagramelor de eforturi)

- ✚ când sarcina tangențială uniform distribuită p_t este nulă, forța axială este constantă;
- ✚ când sarcina normală uniform distribuită q este nulă, forța tăietoare este constantă iar momentul încovoietor variază liniar;
- ✚ când sarcina normală uniform distribuită este constantă, forța tăietoare variază liniar iar momentul încovoietor variază parabolic;
- ✚ dacă forța tăietoare intersectează linia de referință, diagrama de moment încovoietor va prezenta un punct de extrem în dreptul secțiunii în care forța tăietoare este nulă (vezi figura 10);

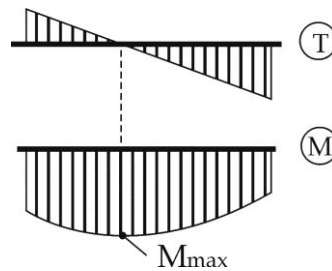


fig.10

- ✚ în dreptul unei sarcini concentrate diagrama forței tăietoare face un salt egal cu sarcina din punctul respectiv (chiar în sensul acesteia), pentru un parcurs al barei de la stânga la dreapta, iar diagrama de moment încovoietor prezintă un vârf în sensul săgeții sarcinii concentrate (figura 11);

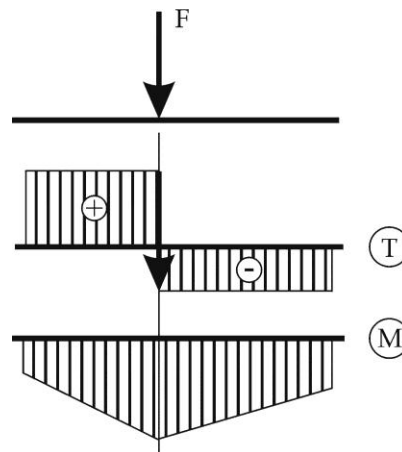


fig.11

- ✚ în dreptul unui cuplu ce acționează asupra barei, diagrama de moment încovoietor prezintă un salt (discontinuitate) egal cu valoarea cuplului și în sensul acestuia (vezi figura 12).

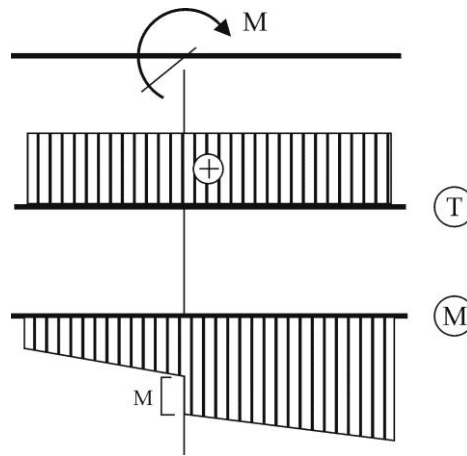


fig.12

1.2.5 Trasarea diagramelor de eforturi

Pentru trasarea diagramelor de eforturi se determină eforturile în punctele caracteristice prin metoda reducerii, astfel, prin parcurgerea barei de la stânga la dreapta (pe sensul de parcurs), se sumează efectul forțelor de la stânga SAU de la dreapta secțiunii caracteristice în discuție.

Între punctele caracteristice se reprezintă modul de variație în lungul barei al efortului secțional, în baza relațiilor diferențiale prezentate; punctele caracteristice sunt cele în care încărcarea prezintă modificări (puncte de discontinuitate în schema de încărcare).

Grinda simplu rezemată la extremități, încărcată cu o sarcină concentrată

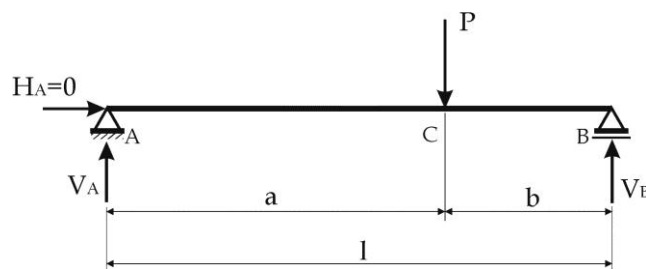


fig.13

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow V_A = \frac{P \cdot b}{l}, \quad \sum M_A = 0 \Rightarrow V_B = \frac{P \cdot a}{l};$$

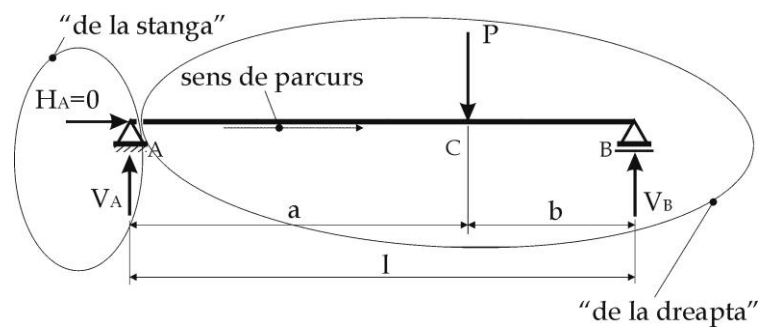


fig.14

Se secționează bara la o distanță infinit mică la dreapta secțiunii A și se aplică relația de definiție a forței tăietoare, astfel, cu forțele de la stânga (raportându-ne la fața din dreapta a secțiunii), se obține:

$$T_A^{dr} = T_A = V_A^{orar} = \frac{P \cdot b}{l}, (+)$$

sau (eventual pentru verificare), cu forțele de la dreapta (raportându-ne la fața din stânga a secțiunii), se obține:

$$T_A = P + V_B^{antiorar} = P - \frac{P \cdot a}{l} = \frac{P \cdot l}{l} - \frac{P \cdot a}{l} = \frac{P}{l}(l - a) = \frac{P \cdot b}{l}, (+);$$

se ține seama de faptul că (în cazul discutat), pe intervalul A_{dr} - C_{st} nu intervine vreo încărcare (forță) pe direcția normalei la axa longitudinală a barei (vezi relația de definiție a forței tăietoare), obținându-se:

$$T_A^{dr} = T_C^{st} = T_{A-C} = \frac{P \cdot b}{l}, (+).$$

Se continuă, după sensul de parcurs ales, cu secțiunea C_{dr}, pentru a se pune în evidență discontinuitatea produsă de sarcina concentrată P ce acționează (chiar) în secțiunea C, astfel:

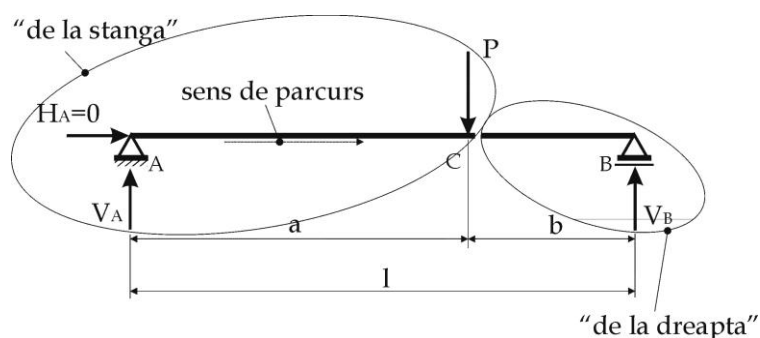


fig.15

cu forțele de la stânga (raportând efectul forțelor luate în considerare la fața din dreapta a secțiunii):

$$\begin{aligned} T_C^{dr} &= V_A^{orar} + P^{antiorar} = \frac{P \cdot b}{l} - P = \frac{P \cdot b}{l} - \frac{P \cdot l}{l} = \frac{P}{l}(b - l) \stackrel{l > b}{=} \\ &= -\frac{P}{l}(l - b) = -\frac{P \cdot a}{l} \quad \text{sau} \quad T_C^{dr} = \frac{P \cdot a}{l}, (-) \end{aligned}$$

sau cu forțele de la dreapta (cu referire la efectul asupra feței din stânga a secțiunii):

$$T_C^{dr} = V_B^{antiorar} = \frac{P \cdot a}{l}, (-).$$

Se remarcă absența vreunei alte forțe pe direcția de interes (normala la axa barei), între secțiunile C_{dr} - B_{st}, și în acest caz putându-se exprima valoarea forței tăietoare pe un întreg interval, astfel:

$$T_C^{dr} = T_B^{st} = T_{C-B} = -\frac{P \cdot a}{l} \left(= \frac{P \cdot a}{l}, (-) \right).$$

În ceea ce privește determinarea valorilor ce intervin la trasarea diagramei de moment încovoietor, raționamentul de calcul este identic, ținându-se seama, însă, de modul de definiție al momentului încovoietor ca efort secțional; în secțiunile situate chiar pe reazeme, momentul încovoietor este (în acest caz) nul, datorită absenței brațelor forțelor V_A, V_B în raport cu centrul de greutate al secțiunii A respectiv B, astfel:

$$M_A = M_B = 0;$$

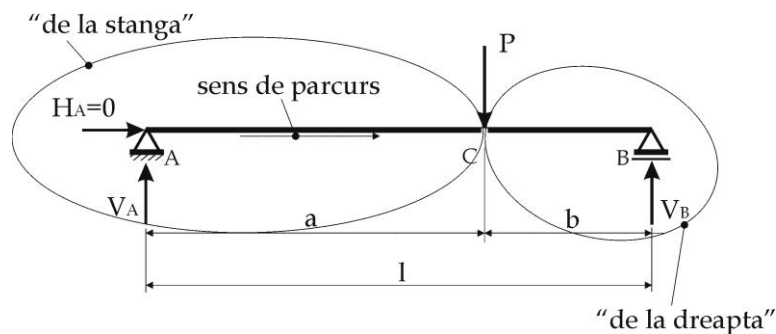


fig.16

pentru secțiunea C, cantitatea cu care se modifică brațele forțelor la trecerea din stânga (infinit mic) în dreapta (infinit mic) secțiunii este neglijabilă, așadar, cu forțele de la stânga (în raport cu fața din dreapta a secțiunii):

$$M_C^{st} = M_C^{dr} = M_C = \overset{\text{intinde jos, comprima sus}}{V_A \cdot a} = \frac{Pb}{l} \cdot a = \frac{Pab}{l}, (+)$$

sau cu forțele de la dreapta (în raport cu fața din stânga a secțiunii):

$$M_C = \overset{\text{intinde jos, comprima sus}}{V_B \cdot b} = \frac{Pa}{l} \cdot b = \frac{Pab}{l}, (+).$$

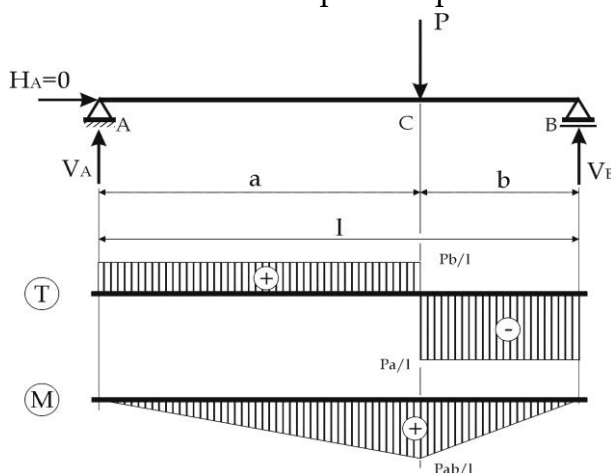


fig.17

Trasarea diagramelor de eforturi (vezi figura 17) a fost făcută cu respectarea convențiilor de așezare a diagramei în raport cu linia de referință (ce are forma structurii studiate), precum și a relațiilor diferențiale între eforturi și încărcări; pentru stabilirea unei valori caracteristice unei secțiuni este suficientă folosirea doar a uneia din cele două variante ("de la stânga", "de la dreapta") în ceea ce privește mulțimea forțelor luate în calcul, verificarea finală putând fi realizată fie prin aplicarea relațiilor diferențiale, fie prin alte metode (poligon de forțe, etc. - vezi seminar). Este semnificativ faptul că, oricare ar fi mulțimea de unde se iau în considerare forțele, în cazul respectării stricte a convențiilor și definițiilor date pentru eforturi secționale, rezultatul trebuie să fie același.

Obs. Nu există nici o legătură (relație de dependență) între denumirea secțiunii ($A_{st.}$, $2_{dr.}$) și mulțimea de unde se iau în considerare forțele (de la stânga, de la dreapta), putând fi folosite toate combinațiile cu putință; de exemplu, se poate calcula M_2^{dr} și cu forțele de la stânga dar la fel de bine și cu forțele de la dreapta secțiunii doi dreapta ($2_{dr.}$).

Bibliografie

- Andreescu I., Mocanu Șt.,- *Compendiu de Rezistența Materialelor* (curs), Ed. MatrixRom, București, 2005, ISBN 973-685-869-3, (Cap.1, p.20÷38).
- Ungureanu I., Ispas B., Constantinescu E.,- *Rezistența Materialelor I* (curs), Universitatea Tehnică de Construcții București, 1995, (Cap.1, p.12÷26).
- Suport de curs de Rezistența Materialelor (ing.zi, ing.seral), format multimedia și site – Mocanu Șt., ediție de uz intern, Facultatea de Utilaj Tehnologic, 2006, (curs2).

Test de autoevaluare 1.2

1. Modul de variație în lungul barei al unui efort secțional dat reprezintă
2. În plan, pentru un singur corp se pot exprima șase ecuații de echilibru, trei în termen de forțe și trei în termen de moment. (adevărat/fals).
3. Panta forței tăietoare este dată de semnul momentului încovoietor? (adevărat/fals).
4. Panta momentului încovoietor este dată de semnul forței tăietoare? (adevărat/fals).
5. Suma de momente în raport cu orice punct caracteristic al structurii este egală cu 0? (adevărat/fals).
6. Momentul (încovoietor) în orice punct caracteristic al structurii este egal cu 0? (adevărat/fals).
7. Într-un reazem încastrat, în spațiu, este necesară determinarea a trei componente (reacțiuni), două forțe și un moment încovoietor? (adevărat/fals).

Sugestii privind rezolvarea testului de autoevaluare 1.2

1. Diagrama efortului secțional în discuție.
2. Fals, în spațiu, pentru un corp se pot exprima șase ecuații de echilibru.
3. Fals, vezi paragraful 1.2.4.
4. Adevărat, vezi paragraful 1.2.4.
5. Adevărat, din rațiuni de echilibru ale structurii.
6. Fals, vezi diagrame de efort.
7. Fals, vezi întrebarea 2.